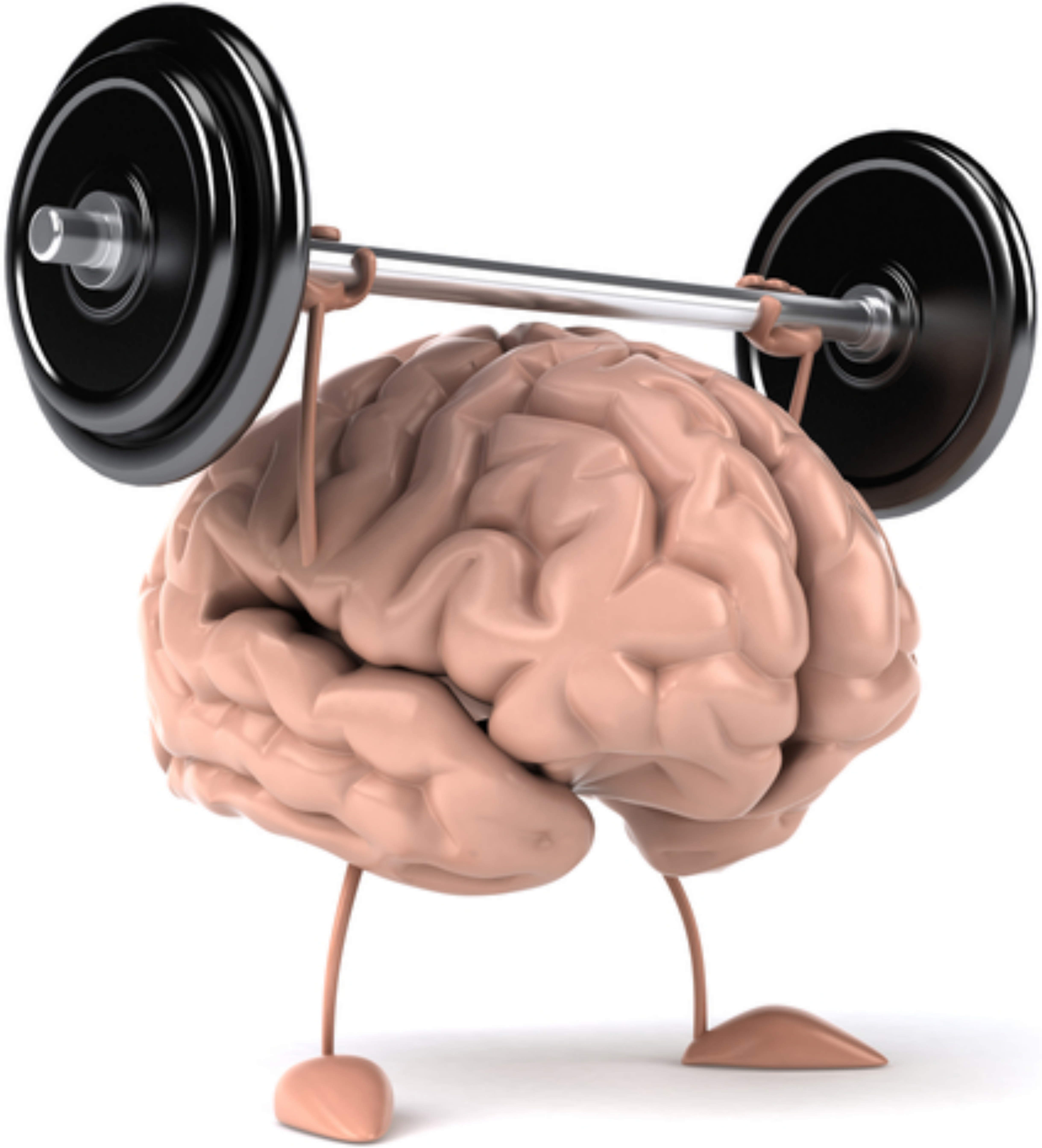


Révision
Examen final

MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée
Jean-François Lalonde

Stratégies **avant** l’examen

- Dans les jours précédant l’examen :
  - DORMIR
  - Étude :
    - devoirs, exercices faits en classe
    - examens des années précédentes—**ATTENTION**!
    - révision des notes de cours pour les modules plus difficiles
    - objectifs du cours (sur le site web)
- Dans les heures précédant l’examen :
  - Alimentation adéquate (attention au *sugar crash*)
  - Économisez votre énergie intellectuelle
  - Détente

Stratégies durant l’examen

- **Avant** de commencer :
  - Survoler l’examen et classer les questions selon leur difficulté/temps
- **Après** avoir commencé :
  - Commencer par les questions les plus faciles !
  - Bloqué.e ? Sautez la question et prenez note d’y revenir
  - Faites comme Dwight : respirez !

Stratégies après l’examen

4. Valeurs et vecteurs propres

Vecteur propre

- Un **vecteur propre** d'une matrice $\mathbf{A}$ de dimensions $n \times n$ est un vecteur non-nul tel que :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

L'orientation de $\mathbf{x}$ n'est pas modifiée par $\mathbf{A}$!

Calcul des valeurs et vecteurs propres

- λ est une **valeur propre** de $\mathbf{A}$ si l'équation suivante admet une solution non-triviale :

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

Problème : nous avons 2 inconnues (λ et $\mathbf{x}$)…

- Si l'espace nul n'est pas de dimension 0, cela revient à dire que la matrice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ est **singulière**.

Besoin d'une façon (autre que l'élimination) de déterminer si une matrice est singulière !

Cofacteurs

- Le cofacteur d'un élément a_{ij} d'une matrice $n \times n$ est :

$$\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{(i+j)} \det \mathbf{A}_{ij}$$

On obtient $\mathbf{A}_{ij}$ en retirant la ligne i et la colonne j de $\mathbf{A}$

Expansion de cofacteurs de Laplace

- Le déterminant d'une matrice $\mathbf{A}$ de dimensions $n \times n$ est donné par

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{i1}\mathbf{C}_{i1} + a_{i2}\mathbf{C}_{i2} + \ldots + a_{in}\mathbf{C}_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{C}_{ij} \end{aligned}$$

pour n'importe quelle **ligne**

- ou :

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{1j}\mathbf{C}_{1j} + a_{2j}\mathbf{C}_{2j} + \ldots + a_{nj}\mathbf{C}_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{C}_{ij} \end{aligned}$$

pour n'importe quelle **colonne**

Signe du cofacteur ?

$$\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{(i+j)}\mathrm{det}\mathbf{A}_{ij}$$

- $(i + j)$ pair ou impair ?

- Truc :

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Résumé

Les valeurs propres d'une matrice $\mathbf{A}$ sont les solutions de l'équation

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

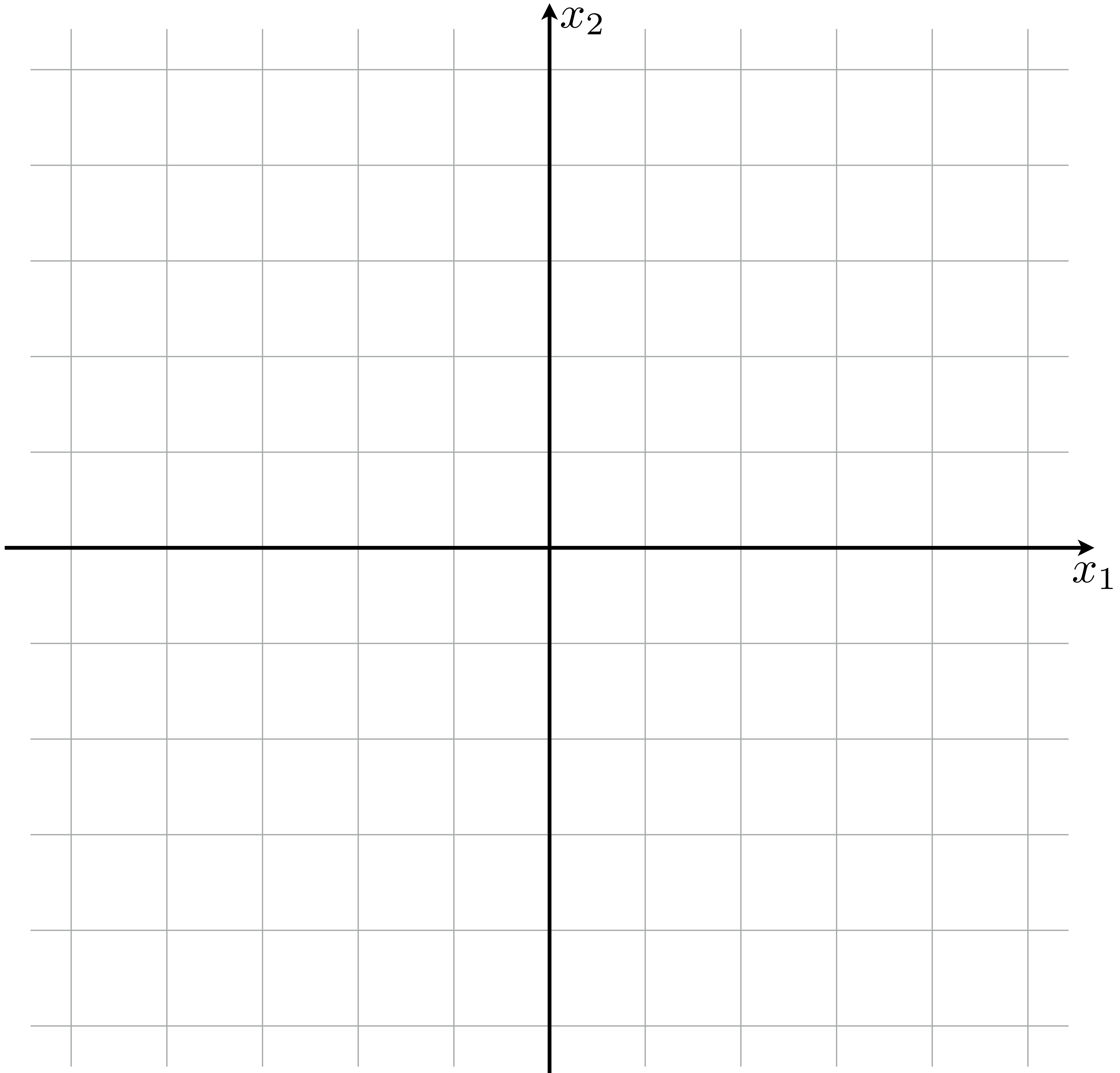
1. Calculer le polynôme caractéristique
2. Déterminer les valeurs propres en trouvant les racines du polynôme
3. Pour chaque valeur propre λ_i :
    1. Calculer une base pour l'espace nul de la matrice $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}$
    2. Les vecteurs formant cette base sont les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ associés à λ_i

5. Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux (ou perpendiculaires)

- Deux vecteurs sont orthogonaux si :

- Le vecteur **0** est orthogonal à n'importe quel autre vecteur



Sous-espaces d'une matrice

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} n \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right]m \\ \operatorname{rang}(\mathbf{A}) = r \end{array}$$

Espace des lignes

Espace des colonnes

Espace nul

Espace nul de $\mathbf{A}^\top$

Théorème de la décomposition orthogonale

Soit $\mathscr{W}$ un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ peut être écrit sous la forme

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{z}$$

où $\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{W}$ et $\mathbf{z} \in \mathscr{W}^{\perp}$. Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ est une base orthogonale de $\mathscr{W}$, alors

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

Objectif

- Soit un sous-espace $\mathscr{W} \in \mathbb{R}^n$ donné par une base

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$$

- La méthode de Gram-Schmidt permet de trouver une base orthogonale (et même orthonormale) du même sous-espace $\mathscr{W}$

$$\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_p\}$$

Cas à deux vecteurs

- Commençons par un sous-espace $\mathscr{W}$ à 2 dimensions

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$$

- On obtient

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2^\top \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^\top \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

- Sont-ils bien orthogonaux ?

Factorisation QR

Rappel
$\mathbf{Q}$ est une matrice orthonormale

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}$$

On sait comment calculer $\mathbf{Q}$. Comment obtenir $\mathbf{R}$?

6. Distance et approximation

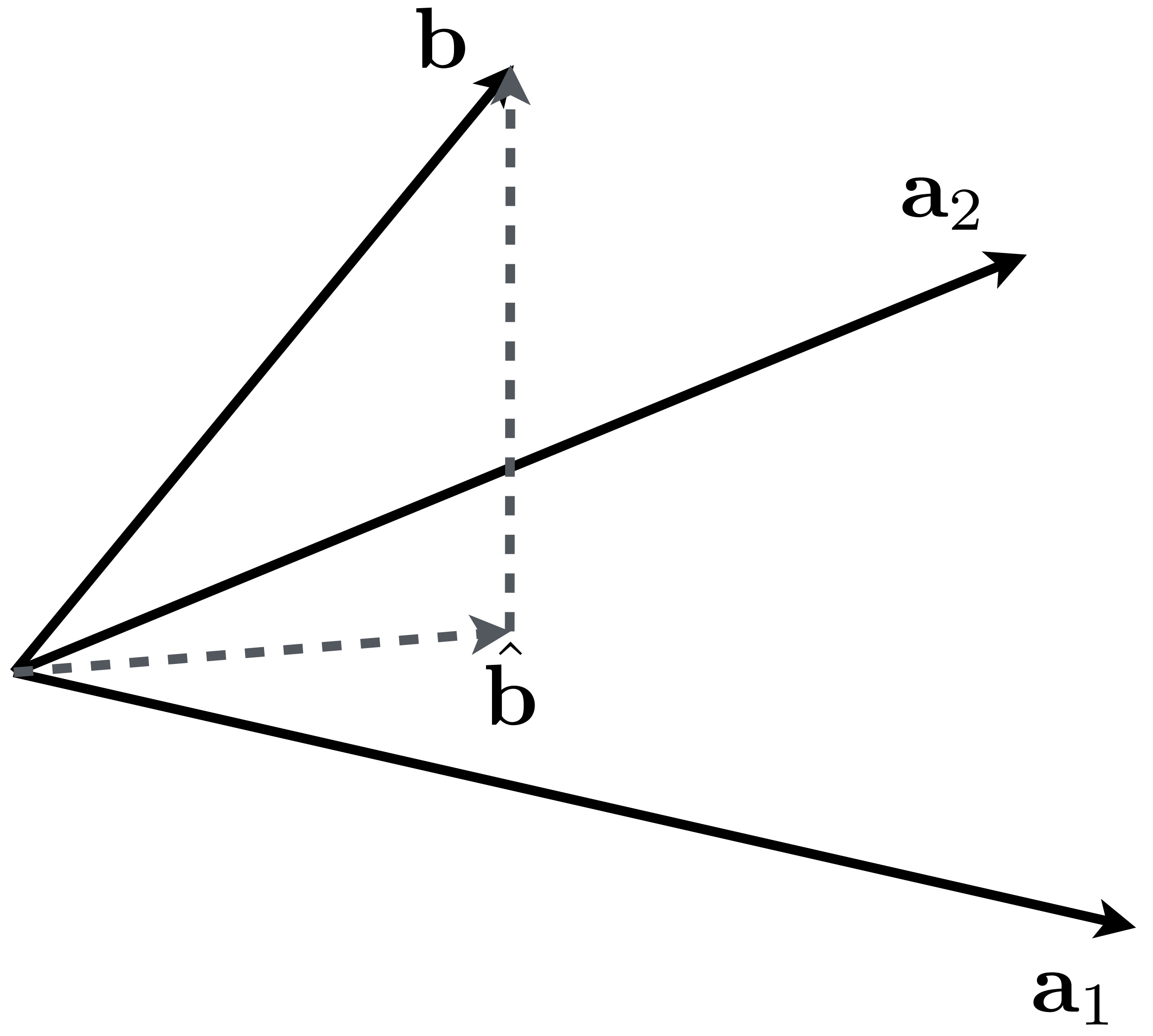
Moindres carrés

On nomme la solution à l'équation

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$$

On nomme cette équation l'**équation normale**

la solution aux moindres carrés
car c'est elle qui minimise l'erreur quadratique moyenne



$$\epsilon = ||\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}||$$

Inversibilité

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$$

C'est la matrice pseudo-inverse

Si les colonnes de $\mathbf{A}$ sont linéairement indépendantes, alors $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ est inversible.

Preuve ? Commençons avec $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

La décomposition en valeurs singulières
(*Singular Value Decomposition*, ou SVD)

La SVD permet de factoriser n'importe quelle matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$$